

# **A 2.14.2 TEORÍA DE CIRCUITOS I**

## **CAPÍTULO 5**

### **CUADRIPOLOS**

**Cátedra de Teoría de Circuitos I**

**Edición 2014**

### 5.1 Introducción.

Como ya demostramos anteriormente, una red arbitraria de dos terminales compuesta por fuentes y elementos pasivos puede representarse por un equivalente de Thevenin o de Norton. Ahora generalizaremos el concepto de circuito equivalente para incluir una clase importante de redes de cuatro terminales denominadas **cuadripolos**.

Los circuitos equivalentes aquí usados tienen diversas aplicaciones, por ejemplo, en electrónica como modelos lineales de dispositivos físicos, en comunicaciones y sistemas de transmisión de potencia para simplificar el análisis de los circuitos usados, etc.

### 5.2 Definición.

En la Figura 1 podemos observar un circuito con dos pares de bornes de acceso que lo vinculan al resto de la red. Desde ahora en adelante, a cada par de bornes lo denominaremos “puerto”.

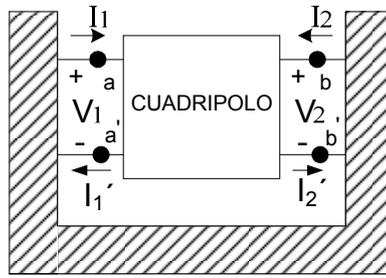


Figura 1: Modelo genérico de Cuadripolo interconectado a una red genérica

El circuito mostrado tiene la particularidad de que la corriente neta que entra a cada puerto es cero: las corrientes que salen de los bornes  $a'$  y  $b'$  son iguales a las correspondientes corrientes que entran en  $a$  y  $b$ , es decir  $I_1 = I_1'$  e  $I_2 = I_2'$ . Esta propiedad es la que diferencia al cuadripolo de cualquier otra red arbitraria de cuatro terminales. Por esta razón podemos considerar la siguiente definición:

**Se denomina cuadripolo a cualquier red de cuatro terminales (dos puertos) en la cual se cumpla que la corriente neta que entra a cada par es igual a cero.**

Observamos que al definir el circuito de la Figura 1 no se dice nada acerca de las tensiones  $V_{a'b'}$  o  $V_{ab}$ . Las únicas variables de interés son las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  y las tensiones  $V_{aa'} = V_1$  y  $V_{bb'} = V_2$ .

Las condiciones impuestas a las corrientes que entran a un cuadripolo son, a veces, el resultado del circuito encerrado en el rectángulo de la Figura 1. Frecuentemente, sin embargo, dichas condiciones dependen de la forma en que se conecta a otros, como se ven en la Figura 2.

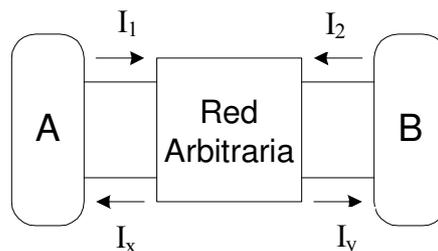


Figura 2: Cuadripolo como una parte de una red

Por LKC vemos que la corriente neta que entra a A o B es cero, por lo tanto  $I_x = I_1$ ,  $I_y = I_2$  y la “red arbitraria” se comporta como un cuadripolo.

Dijimos que un cuadripolo se caracteriza porque la corriente que entra por un terminal de un puerto es idéntica a la que sale por el otro terminal del mismo puerto. Sin embargo no siempre visualizaremos a un cuadripolo como una caja con dos pares de terminales, como se muestra en la Figura 3.a. Como se ve en la Fig. 3. b., un circuito de cuatro terminales con tres corrientes independientes y tres tensiones independientes también podría considerarse como un cuadripolo para el caso en que  $I_3 = -I_2$ .

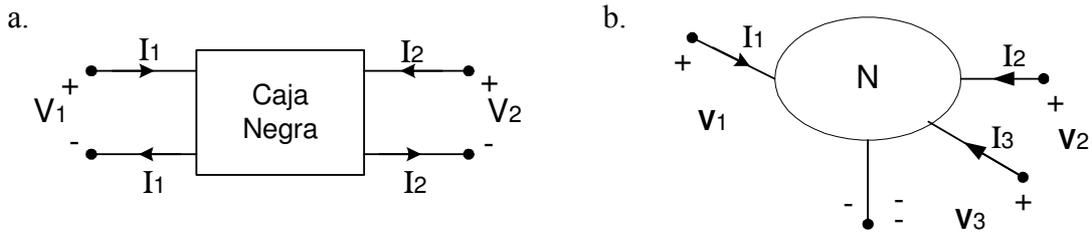


Figura 3: Distintas configuraciones de cuadripolos

Diremos que un cuadripolo es lineal e invariante en el tiempo si y solo si posee sólo elementos lineales invariantes en el tiempo y fuentes independientes. En la Figura 4 se muestra el esquema de un sistema de transmisión, el cual puede describirse en función de la interconexión de subcircuitos:

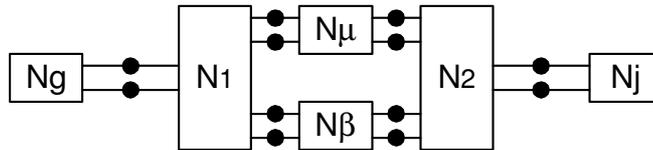


Figura 4: Sistema de transmisión visto como interconexión de cuadripolos

donde:

DIPOLOS	CUADRIPOLOS	REDES DE TRES PUERTOS
$N_g$ : generador $N_j$ : carga	$N_\mu$ : circuito amplificador $N_\beta$ : circuito de realimentación	$N_1$ : circuito de acoplamiento de entrada $N_2$ : circuito de acoplamiento de salida

Con propósitos de diseño, las especificaciones de ganancia, ancho de banda, impedancia, sensibilidad y estabilidad de todo el circuito se traducen primero en especificaciones separadas de cada subcircuito en función de las caracterizaciones de sus puertos.

### 5.3 Caracterización de cuadripolos

Cualquier cuadripolo puede caracterizarse en función de sus tensiones de entrada  $V_1$  y  $V_2$  y sus corrientes  $I_1$  e  $I_2$ , definiéndose sus polaridades según se indica en la Figura 5.

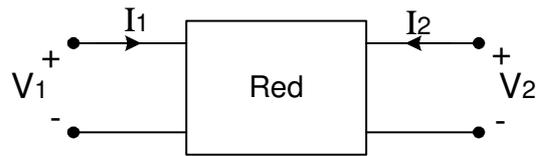


Figura 5: Modelo genérico del Cuadripolo

De las cuatro variables,  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $I_1$  e  $I_2$ , un par cualquiera puede considerarse como variables independientes, y el par restante como variables dependientes. Por ejemplo, si  $V_1$  y  $V_2$  son fijas,  $I_1$  e  $I_2$  estarán unívocamente determinadas. Al fijar  $V_1$  e  $I_2$  se determinan unívocamente  $V_2$  e  $I_1$ . Luego, por análisis combinatorio, tendremos un total de  $4! / 2! 2! = 6$  posibles combinaciones para la elección del par de variables independientes. Para cada elección podemos escribir las variables dependientes como combinación lineal de las independientes.

Vemos así que, si bien un dipolo puede caracterizarse mediante un solo parámetro (relación entre una variable independiente y una dependiente, como ocurre en una resistencia,  $V = R I$ ), un cuadripolo requiere cuatro parámetros que lo caractericen, siendo posibles seis conjuntos diferentes de cuatro parámetros cada uno.

#### 5.4 Parámetros admitancia en cortocircuito (parámetros “Y”)

Sean  $V_1$  y  $V_2$  las variables independientes, e  $I_1$  e  $I_2$  las dependientes. Luego, el cuadripolo quedara caracterizado como

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \\ I_2 &= Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Las cuatro constantes  $Y_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) están definidas como:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0} = I_1 \Big|_{V_1=1} & Y_{12} &= \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0} = I_1 \Big|_{V_2=1} \\ Y_{21} &= \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0} = I_2 \Big|_{V_1=1} & Y_{22} &= \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0} = I_2 \Big|_{V_2=1} \end{aligned}$$

Luego,  $Y_{11}$  puede calcularse (o medirse) cortocircuitando los bornes 2-2' y conectando una fuente de tensión de 1 V y midiendo, o calculando  $I_2$ . Planteos similares valen para los otros parámetros. Los  $Y_{ij}$  se obtienen con los bornes 1-1' o 2-1' cortocircuitados, por lo que se denominan **parámetros admitancia en cortocircuito**. En caso de trabajar en CC hablaremos de **conductancias**.

- $Y_{11}$ ,  $Y_{22}$  son las admitancias de entrada vistas desde 1-1' o 2-2',
- $Y_{12}$ ,  $Y_{21}$  son las admitancias de transferencia.

En notación matricial será:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

A partir de estas ecuaciones podemos sintetizar un modelo de cuadripolo como el de la Figura 6.

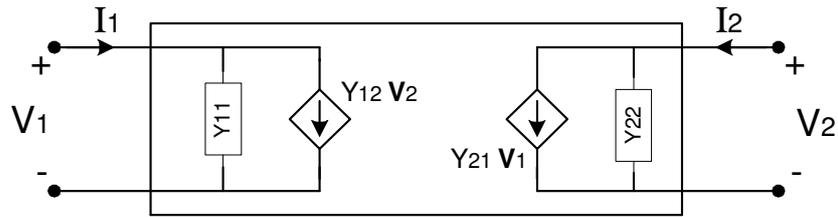


Figura 6: Modelo del cuadripolo a partir de parámetros admitancia en cortocircuito

En resumen, cualquier cuadripolo lineal a parámetros concentrados sin fuentes independientes puede describirse unívocamente mediante dos ecuaciones en función de las tensiones y corrientes de entrada. Se deduce entonces que, al menos en lo referente al comportamiento en bornes, el cuadripolo puede caracterizarse unívocamente por su matriz de admitancia en cortocircuito.

### 5.5 Parámetros impedancia en circuito abierto (parámetros “Z”)

Si elegimos las corrientes como variables independientes y las tensiones como las variables dependientes llegamos a poder expresar las tensiones en bornes como combinación lineal de las corrientes entrantes. Así será:

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{aligned} \quad (4)$$

A partir del sistema de ecuaciones (4) podemos obtener las  $Z_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ):

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

Los cuatro coeficientes  $z_{ij}$  se denominan **parámetros de impedancia en circuito abierto**, o **parámetros Z**, y todos se obtienen dejando algún par de bornes en circuito abierto:

- $Z_{11}, Z_{22}$  son las impedancias de entrada (resistencias si trabajamos en C.C.) vistas desde 1-1' o 2-2',
- $Z_{12}, Z_{21}$  son las impedancias de transferencia.

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

A partir del sistema de ecuaciones (4) podemos sintetizar un modelo equivalente del cuadripolo, considerando cada ecuación como la expresión de la ley de Kirchhoff de tensiones en una rama, modelo que se muestra en la Figura 7.

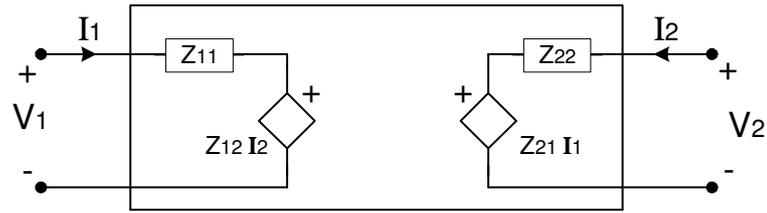
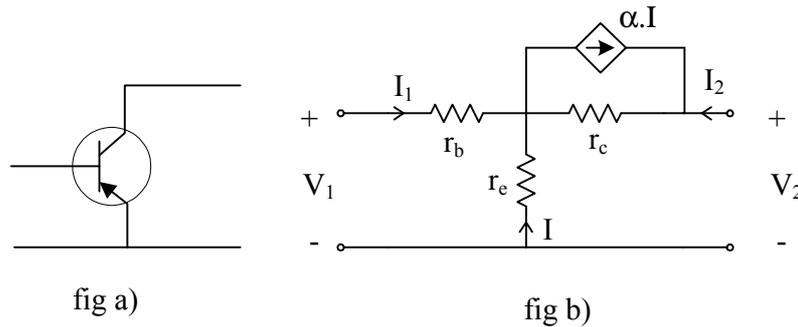


Figura 7: Modelo del cuadripolo a partir de parámetros impedancia en circuito abierto

### Ejercicio de aplicación:

Calcular la matriz impedancia en circuito abierto para el transistor con emisor a masa (configuración emisor común) de la figura a), cuyo modelo se muestra en la figura b).



Rta.:

$$Z = \begin{bmatrix} r_b + r_e & r_e \\ r_e - \alpha r_c & r_e + r_c(1 - \alpha) \end{bmatrix}$$

### 5.6 Parámetros híbridos (parámetros “H”)

Se obtienen eligiendo  $I_1$  y  $V_2$  como variables independientes, con  $V_1$  e  $I_2$  como variables dependientes, siendo esta falta de uniformidad dimensional lo que da origen al nombre de “híbridos”. Expresando las variables dependientes como combinación lineal de las independientes, obtenemos:

$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 &= h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{aligned} \quad (6)$$

Los cuatro coeficientes  $h_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) están dados por:

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} \quad h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0} \quad h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} \quad h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0}$$

donde:

$h_{11}$  es la **impedancia de entrada** vista desde el puerto 1-1' con el puerto 2-2' en cortocircuito

$h_{12}$  es la **inversa de la ganancia en tensión** en circuito abierto.

$h_{21}$  es la **ganancia de corriente** en cortocircuito

$h_{22}$  es la **admitancia de entrada** vista desde 2 -2' con 1 - 1' en circuito abierto.

6

Observamos que  $h_{11}$  tiene dimensiones de impedancia,  $h_{22}$  tiene dimensiones de admitancia, y  $h_{12}$  y  $h_{21}$  son adimensionales. El hecho de que los cuatro parámetros no posean las mismas unidades hace que reciban el nombre de “híbridos” (“**H**”). Estos parámetros híbridos son de uso frecuente para el transistor bipolar y, a bajas frecuencias, son mucho más fáciles de medir en el laboratorio que los parámetros  $\underline{Y}$  o  $\underline{Z}$ .

Las ecuaciones (6) pueden también escribirse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

A partir del sistema de ecuaciones (6) puede sintetizarse una red en función de los parámetros  $\underline{h}$ , interpretando  $V_1$  como la suma de dos tensiones e  $I_1$  como la suma de dos corrientes, lo cual se muestra en el circuito equivalente de la Figura 8.

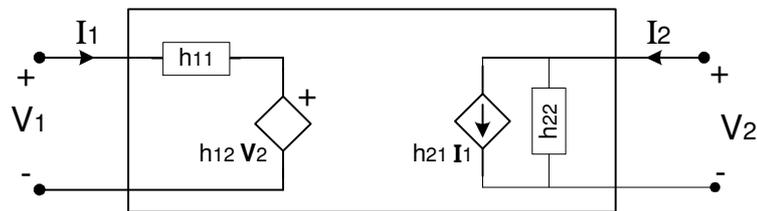


Figura 8: Modelo del cuadripolo a partir de parámetros híbridos

En resumen, cualquier cuadripolo lineal a parámetros concentrados sin fuentes independientes puede caracterizarse por su matriz de parámetros híbridos, los cuales proveen una caracterización conveniente para transistores y redes a transistores.

También podríamos haber definido una segunda matriz híbrida, tomando como variables independientes la tensión  $V_1$  y la corriente  $I_2$ :

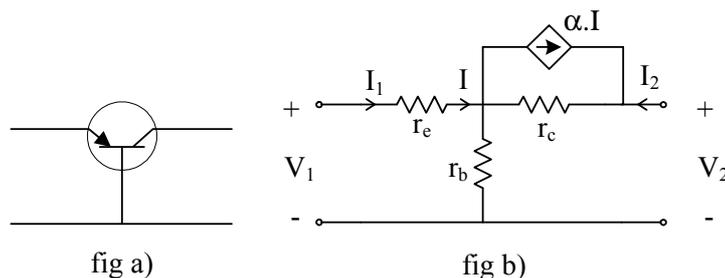
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [H'] \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

A estos parámetros los designamos como  $H'$ , y se ve claramente que  $H' = H^{-1}$  si  $H$  es no singular.

**Ejemplo de aplicación:**

Calcular los parámetros híbridos del transistor en su configuración base común que se muestra en la figura a), cuyo modelo se muestra en la figura b).

Suponer que  $\alpha = 0,99$ ;  $r_b = 10^3 \Omega$ ;  $r_e = 10 \Omega$ ;  $r_c = 10^6 \Omega$ .



$$\text{Rta.: } H = \begin{bmatrix} 20\Omega & 1.10^{-3} \\ 0.988 & 1.10^{-6}\Omega^{-1} \end{bmatrix}$$

### 5.7 Parámetros de transferencia (“T”, fundamentales o de transmisión)

Con frecuencia suele ser conveniente elegir la tensión y la corriente en bornes, 2-2' como variables independientes, y la tensión y corriente en 1-1' como variables dependientes. Esto se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} V_1 &= A V_2 - B I_2 \\ I_1 &= C V_2 - D I_2 \end{aligned} \quad (8)$$

donde los cuatro coeficientes están dados por:

$$A = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} \quad B = - \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0} \quad C = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} \quad D = - \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0}$$

donde:

**A** es la **ganancia en tensión** con los bornes 2-2' en circuito abierto;

**B** es la **impedancia de transferencia** en cortocircuito;

**C** es la **admitancia de transferencia** en circuito abierto;

**D** es el negativo de la **ganancia en corriente** con los bornes 2-2' en cortocircuito.

Los parámetros así obtenidos se denominan parámetros **T** o de transferencia, y, en forma matricial, la ecuación (8) toma la forma:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde **T** es la matriz *transferencia* o de *transmisión*.

Si bien no se puede dibujar un circuito equivalente como se hizo en los casos anteriores, dado que ambas ecuaciones corresponden a las variables tensión y corriente *en el mismo puerto*, estos parámetros son muy convenientes para analizar redes conectadas en cascada, como se verá más adelante.

La razón del signo - asociado con  $I_2$  en las ecuaciones anteriores se debe, históricamente, al hecho de que, en el estudio de redes de transmisión, el puerto 2 usualmente se considera como la salida, y el puerto 1 como la entrada, y se piensa en señales que ingresan por el puerto 1 y salen por el 2. Esto implica que un generador se conecte al puerto 1 y una carga al puerto 2, de forma que  $-I_2$  sea la corriente que entra a la carga.

Una segunda forma de matriz transferencia sería la siguiente, si tomamos como variables independientes la tensión y la corriente asociadas al puerto 1:

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = [T'] \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

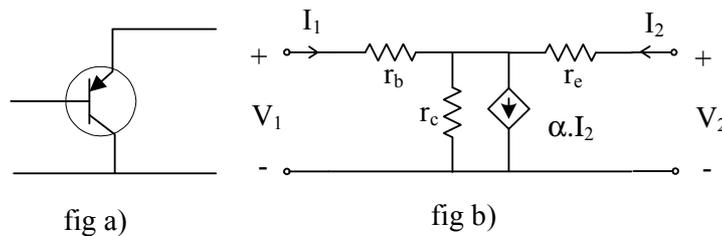
o, en forma escalar:

$$\begin{cases} V_2 = t'_{11} V_1 + t'_{12} I_1 \\ -I_2 = t'_{21} V_1 + t'_{22} I_1 \end{cases}$$

Vemos que, dado que la matriz de transferencia (o transmisión) directa  $T$  expresa la tensión y la corriente en el puerto 1 en función de la tensión y la corriente en el puerto 2, y la matriz de transmisión inversa  $T'$  expresa la tensión y corriente en el puerto 2 en función de la tensión y corriente en el puerto 1, resulta que ambas matrices son inversas, es decir  $[T'] = [T]^{-1}$ .

### Ejemplo de aplicación:

Hallar la matriz de parámetros transferencia para el transistor con colector común de la figura a) suponiendo trabajar con el modelo de la figura b).



$$Rta.: \quad T = \begin{bmatrix} \frac{(r_b + r_c)}{r_c} & \frac{[r_c \cdot r_e + r_b \cdot r_e + r_c \cdot r_b (1 - \alpha)]}{r_c} \\ \frac{1}{r_c} & \frac{[r_e + r_c \cdot (1 - \alpha)]}{r_c} \end{bmatrix}$$

### 5.8 Relaciones entre los distintos tipos de parámetros.

Dado que la representación de los cuadripolos mediante los parámetros es unívoca, debe existir una relación unívoca entre los distintos juegos. Es decir, partiendo de un determinado juego de parámetros, será posible encontrar, operando algebraicamente, cualquiera de los otros en función de los mismos.

**Ejemplo 1:** hallar los parámetros "h" en función de los "Y":

Hacemos lo siguiente:

1º) Partimos de las ecuaciones de definición de los parámetros Y:

$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 \quad (10)$$

$$I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 \quad (11)$$

2º) reordenamos las mismas en forma de ecuaciones "h"

$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \quad (12)$$

$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \quad (13)$$

3º) De (10) obtenemos  $V_1$ :

$$V_1 = \frac{I}{Y_{11}} I_1 - \frac{Y_{12}}{Y_{11}} V_2 \quad (14)$$

y observamos que la expresión tiene forma similar a (12).

Ahora reemplazamos (14) en (11):

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{Y_{21}}{Y_{11}} I_1 - \frac{Y_{21} Y_{12}}{Y_{11}} V_2 + Y_{22} V_2 \\ &= \frac{Y_{21}}{Y_{11}} I_1 + \left( Y_{22} - \frac{Y_{21} Y_{12}}{Y_{11}} \right) V_2 \end{aligned} \quad (15)$$

cuya forma es similar a (7). Entonces, comparando los coeficientes de  $I_1$  y  $V_2$  en las ecuaciones (14) y (15) con los de las ecuaciones (12) y (7), resulta:

$$\begin{aligned} h_{11} &= \frac{I}{Y_{11}} & h_{12} &= -\frac{Y_{12}}{Y_{11}} \\ h_{21} &= \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & h_{22} &= Y_{22} - \frac{Y_{21} Y_{12}}{Y_{11}} \end{aligned}$$

El proceso inverso también es válido, es decir, pueden hallarse los parámetros  $Y$  a partir de los  $H$ .

**Ejemplo 2:** Hallar la relación entre los parámetros  $Z$  y los  $Y$ .

Esta relación es particularmente importante puesto que se intercambian los roles de las variables independientes y las variables dependientes. Las ecuaciones (10) y (11) se resuelven por Cramer para  $I_1$  e  $I_2$ :

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_1 & Y_{12} \\ I_2 & Y_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix}} = \frac{Y_{22}}{\Delta Y} I_1 + \frac{-Y_{12}}{\Delta Y} I_2 \quad V_2 = \frac{\begin{vmatrix} Y_{11} & I_1 \\ Y_{21} & I_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{vmatrix}} = \frac{Y_{11}}{\Delta Y} I_2 + \frac{-Y_{21}}{\Delta Y} I_1$$

Estas ecuaciones están en forma de parámetros  $Z$ , por lo que:

$$Z_{11} = \frac{Y_{22}}{\Delta Y} \quad Z_{12} = \frac{-Y_{12}}{\Delta Y} \quad Z_{21} = -\frac{Y_{21}}{\Delta Y} \quad Z_{22} = \frac{Y_{11}}{\Delta Y}$$

En general, visto que los  $Z_{ij}$  son los elementos de la matriz inversa  $Y^{-1}$  será:

$$[Z] = [Y]^{-1}$$

Cualquier juego de parámetros puede definirse en función de cualquiera de los otros, pero para algunas redes, una o más de las matrices puede no existir, tal como ocurre con los parámetros Z o Y para el modelo simplificado del transistor.

En la página 25 se encuentra la tabla de conversión de parámetros.

### 5.9 Cuadripolos recíprocos

Se dice que un cuadripolo es recíproco si su matriz de admitancia en cortocircuito y su matriz impedancia en circuito abierto son simétricas (es decir, si  $a_{ij} = a_{ji}$  para todo j). En otras palabras, si es simétrica respecto a la diagonal principal. Por lo tanto:

**Cualquier cuadripolo que contenga solo resistencias, inductancias, capacidades y bobinas acopladas es recíproco.**

En general, las redes que contienen fuentes controladas son no-recíprocas (su matriz de coeficientes es no simétrica). En consecuencia, los cuadripolos recíprocos de matriz simétrica pueden caracterizarse unívocamente mediante tres parámetros, uno menos que los cuatro requeridos para cuadripolos en general. Lo vemos analizando las ecuaciones del modelo en parámetros Z:

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

$$V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2$$

Si el cuadripolo es recíproco, entonces  $Z_{12} = Z_{21}$  y podemos caracterizarlo solo con tres parámetros:  $Z_{11}$ ,  $Z_{22}$ ,  $Z_{12}$ .

$$V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2$$

$$V_2 = Z_{12} I_1 + Z_{22} I_2$$

Más aún, las redes recíprocas pueden caracterizarse sin fuentes controladas. En efecto, siendo que  $Z_{12} = Z_{21}$  y pensando que estas son ecuaciones de bucles, vemos que existe un vínculo galvánico entre las mallas de entrada y de salida debido justamente al elemento  $Z_{12}$ , es decir, el elemento  $Z_{12}$  es el elemento compartido entre la malla 1 y la 2, con lo cual podemos proponer un modelo como el de la figura 9 a, el cual se denomina modelo "T".

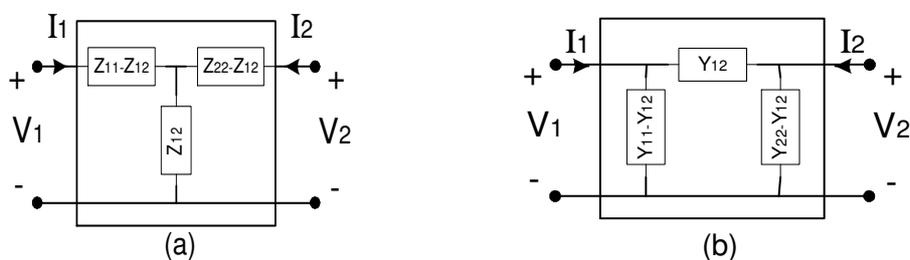


Figura 9: Modelos cuadripolares de una red T (a) y una red  $\pi$  (b)

Si ahora observamos el modelo en parámetros Y:

$$I_1 = Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2$$

$$I_2 = Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2$$

Vemos que podemos pensarlo como un sistema de ecuaciones de un circuito con tres nudos, y si el cuadripolo es recíproco, entonces  $Y_{12} = Y_{21}$ , por lo que el sistema queda:

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2$$

$$I_2 = Y_{12}V_1 + Y_{22}V_2$$

El circuito correspondiente se muestra en la figura 9 (b), y recibe el nombre de modelo “ $\pi$ ”.

Ambas representaciones son únicas para redes recíprocas, es decir, cada red recíproca tiene una y sólo una T equivalente, y una y sólo una  $\pi$  equivalente. Surge así que cualquier red T que consista sólo en elementos pasivos tiene una red  $\pi$  equivalente también pasiva, y viceversa. La transformación de T a  $\pi$  es la que se conoce como estrella – triángulo, fue analizada en el capítulo 4, y se ilustra como sigue:

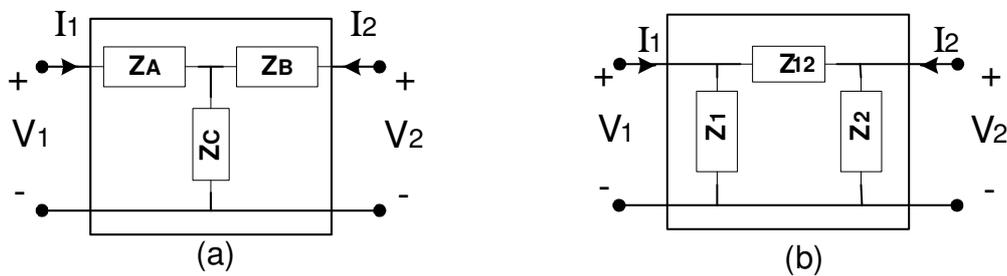


Figura 10: Transformaciones de modelo cuadripolar de una red T a una red  $\pi$

Donde:

$$\begin{aligned} Z_A &= \frac{Z_1 Z_{12}}{Z_1 + Z_{12} + Z_2} & Z_{12} &= \frac{Z_A Z_B + Z_A Z_C + Z_B Z_C}{Z_C} \\ Z_B &= \frac{Z_{12} Z_2}{Z_1 + Z_{12} + Z_2} & Z_1 &= \frac{Z_A Z_B + Z_A Z_C + Z_B Z_C}{Z_B} \\ Z_C &= \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_{12} + Z_2} & Z_2 &= \frac{Z_A Z_B + Z_A Z_C + Z_B Z_C}{Z_A} \end{aligned}$$

Puede demostrarse que, para el caso de ser **cuadripolos recíprocos**, y al utilizar los parámetros T, se cumple que:

$$A D - B C = 1$$

Verificándose además otras relaciones:

$$Z_{12} = Z_{21} \quad Y_{12} = Y_{21} \quad h_{12} = -h_{21} \quad h'_{12} = -h'_{21}$$

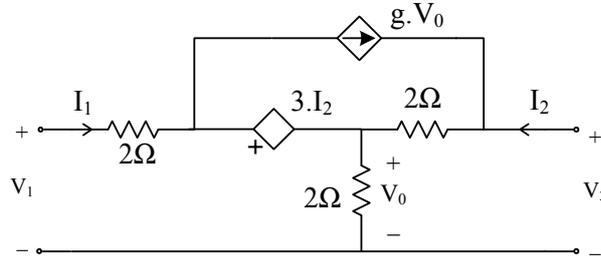
Se dice que un cuadripolo es **simétrico** cuando un intercambio de los puertos no produce modificación en las corrientes y tensiones de los mismos, es decir, es indiferente conectar el generador o la carga en cualquiera de los puertos. En ese caso, se cumplen las siguientes relaciones:

$$Z_{11} = Z_{22} \quad Y_{11} = Y_{22} \quad A = D \quad h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = 1 \quad h'_{11}h'_{22} - h'_{12}h'_{21} = 1$$

**Ejemplo de aplicación:**

Un cuadripolo se dice recíproco si  $Z_{12} = Z_{21}$  y simétrico si  $Z_{11} = Z_{22}$ .

Determinar los valores de "g", si existen, para que cada condición se satisfaga en el siguiente cuadripolo.



**Rta.:** Es recíproco si  $g = 3/4$ . Es simétrico si  $g = 0$

**5.10 Interconexión de cuadripolos.**

En la misma medida que en el capítulo 2 estudiamos la interconexión de dipolos, ahora analizaremos las distintas posibilidades de interconexión de cuadripolos, que son cinco: serie, paralelo, en cascada y mixta (serie-paralelo o paralelo-serie), analizando para cada una cuál es el juego de parámetros más conveniente para hallar el cuadripolo equivalente.

**5.10.1 Interconexión Paralelo**

Consideraremos la interconexión de los cuadripolos  $N^0$  y  $N^\Delta$ , mostrada en la Figura 11.

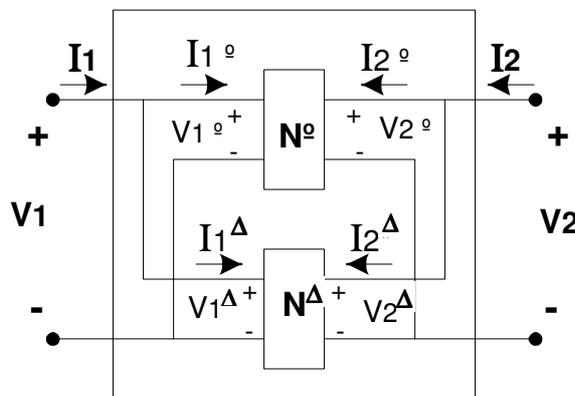


Figura 11: Interconexión paralelo de cuadripolos

Vemos que ambos cuadripolos tienen idénticas tensiones de entrada  $V_1$  e idénticas tensiones de salida  $V_2$  por lo que decimos que se encuentran en paralelo. Dado que queremos hallar el cuadripolo equivalente a la interconexión observamos que conviene modelizar ambos cuadripolos de manera que las variables independientes sean las tensiones. Por este motivo elegimos el modelo en parámetros  $Y$  (admitancia en cortocircuito) para los cuadripolos ( $Y^0$  y  $Y^\Delta$ ). Así, tenemos:

$$\begin{bmatrix} I_1^0 \\ I_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}^0 & Y_{12}^0 \\ Y_{21}^0 & Y_{22}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^0 \\ V_2^0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} I_1^\Delta \\ I_2^\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}^\Delta & Y_{12}^\Delta \\ Y_{21}^\Delta & Y_{22}^\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^\Delta \\ V_2^\Delta \end{bmatrix} \quad (16)$$

Observando la interconexión vemos que se cumple que:

- Con respecto a las tensiones:

$$V_1 = V_1^0 = V_1^\Delta$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^0 \\ V_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^\Delta \\ V_2^\Delta \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$V_2 = V_2^0 = V_2^\Delta$$

- Con respecto a las corrientes:

$$I_1 = I_1^0 + I_1^\Delta$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^0 \\ I_2^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1^\Delta \\ I_2^\Delta \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$I_2 = I_2^0 + I_2^\Delta$$

Reemplazando (18) en (15) y (16) obtenemos:

$$\begin{bmatrix} I_1^0 \\ I_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}^0 & Y_{12}^0 \\ Y_{21}^0 & Y_{22}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} I_1^\Delta \\ I_2^\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}^\Delta & Y_{12}^\Delta \\ Y_{21}^\Delta & Y_{22}^\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Si ahora sumamos (20) + (21) obtenemos:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1^0 + I_1^\Delta \\ I_2^0 + I_2^\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}^0 + Y_{11}^\Delta & Y_{12}^0 + Y_{12}^\Delta \\ Y_{21}^0 + Y_{21}^\Delta & Y_{22}^0 + Y_{22}^\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Concluyendo que la matriz  $\mathbf{Y}$  equivalente es:

$$[\mathbf{Y}] = [\mathbf{Y}^0] + [\mathbf{Y}^\Delta]$$

Debemos tener presente que esto es válido si y solo los bornes de acceso al cuadripolo equivalente son los pares de terminales de cada uno de los cuadripolos.

### 5.10.2 Interconexión Serie

Consideraremos la interconexión de los cuadripolos  $\mathbf{N}^0$  y  $\mathbf{N}^\Delta$ , mostrada en la Figura 12.

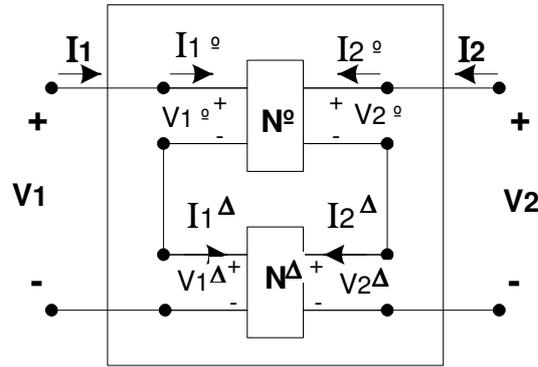


Figura 12: Interconexión serie de cuadripolos

La figura 12 muestra que ambos cuadripolos tienen idénticas corrientes de entrada  $I_1$  e idénticas corrientes de salida  $I_2$ , por lo que decimos que se encuentran en serie. Como queremos hallar el cuadripolo equivalente a la interconexión vemos que conviene modelizar ambos cuadripolos de manera que las variables independientes sean las corrientes. Por este motivo elegimos el modelo en parámetros  $Z$  (impedancia en circuito abierto) para cada uno de los cuadripolos ( $Z^0$  y  $Z^\Delta$ ). Así, tenemos:

$$\begin{aligned} V_1^0 &= Z_{11}^0 I_1^0 + Z_{12}^0 I_2^0 \\ V_2^0 &= Z_{21}^0 I_1^0 + Z_{22}^0 I_2^0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} V_1^\Delta &= Z_{11}^\Delta I_1^\Delta + Z_{12}^\Delta I_2^\Delta \\ V_2^\Delta &= Z_{21}^\Delta I_1^\Delta + Z_{22}^\Delta I_2^\Delta \end{aligned} \quad (23)$$

Queremos llegar a obtener el cuadripolo equivalente en función de los parámetros  $Z$  de cada uno de los cuadripolos interconectados:

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{aligned} \quad (24)$$

Al estar interconectados en serie, se verifica que la tensión de entrada del cuadripolo equivalente es la suma de las tensiones de cada uno de los cuadripolos, y las corrientes de entrada y de salida son iguales para ambos cuadripolos y el cuadripolo equivalente, lo cual nos permite escribir que:

$$V_1 = V_1^0 + V_1^\Delta \quad I_1 = I_1^0 = I_1^\Delta \quad (25)$$

$$V_2 = V_2^0 + V_2^\Delta \quad I_2 = I_2^0 = I_2^\Delta \quad (26)$$

Si reemplazamos la ecuación (26) en (22) y (23), y luego ambas en (25) llegamos a que:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2^\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^0 + V_1^\Delta \\ V_2^0 + V_2^\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}^0 + Z_{11}^\Delta & Z_{12}^0 + Z_{12}^\Delta \\ Z_{21}^0 + Z_{21}^\Delta & Z_{22}^0 + Z_{22}^\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Por lo que concluimos que la matriz equivalente es:

$$\boxed{[Z] = [Z^0] + [Z^\Delta]}$$

### 5.10.3 Interconexión Cascada

Consideraremos la interconexión de los cuadripolos  $N^0$  y  $N^\Delta$  mostrada en la Figura 13.

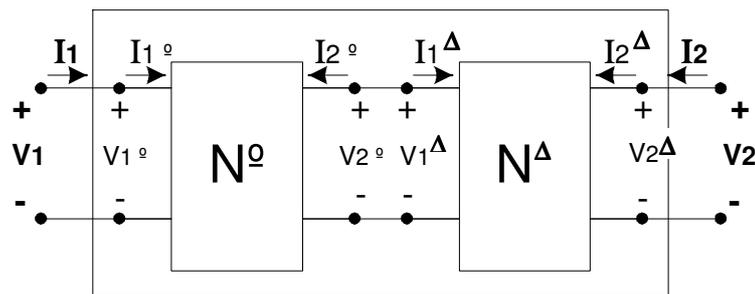


Figura 13: Interconexión cascada de cuádrupolos

Esta interconexión es la más sencilla, y se la denomina “en cascada” o “en tandem” (Balabanian, Teoría de Redes Eléctricas). En ella, los bornes (puerto) de salida de un cuádrupolo se conectan directamente a los bornes (puerto) de entrada del siguiente. Por este motivo, dado que las variables de salida de un cuádrupolo son las variables de entrada del siguiente, el modelo más conveniente para analizar la interconexión será el de parámetros **T**.

$$\begin{aligned} V_1^0 &= A^0 V_2^0 - B^0 I_2^0 \\ I_1^0 &= C^0 V_2^0 - D^0 I_2^0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} V_1^\Delta &= A^\Delta V_2^\Delta - B^\Delta I_2^\Delta \\ I_1^\Delta &= C^\Delta V_2^\Delta - D^\Delta I_2^\Delta \end{aligned} \quad (28)$$

Ecuaciones que, en forma matricial, son:

$$\begin{bmatrix} V_1^0 \\ I_1^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^0 & B^0 \\ C^0 & D^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2^0 \\ -I_2^0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} V_1^\Delta \\ I_1^\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^\Delta & B^\Delta \\ C^\Delta & D^\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2^\Delta \\ -I_2^\Delta \end{bmatrix} \quad (30)$$

Observando los parámetros de la interconexión, vemos que:

$$I_1 = I_1^0 \quad (31)$$

$$V_1 = V_1^0 \quad (32)$$

$$V_1^\Delta = V_2^0 \quad (33)$$

$$I_2 = I_2^\Delta$$

$$V_2 = V_2^\Delta$$

$$I_1^\Delta = -I_2^0$$

Reemplazando la segunda ecuación de (31) y (32) y las dos ecuaciones (33) en (30) obtenemos:

$$\begin{bmatrix} V_2^0 \\ -I_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^\Delta & B^\Delta \\ C^\Delta & D^\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2^\Delta \\ -I_2^\Delta \end{bmatrix} \quad (34)$$

Y haciendo lo mismo con las primeras ecuaciones de (31) y (32) y la igualdad (34) en (29) obtenemos:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^0 & B^0 \\ C^0 & D^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^\Delta & B^\Delta \\ C^\Delta & D^\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Por lo que llegamos a que la matriz total equivalente a la interconexión en cascada de los cuádrupolos  $N^0$  y  $N^\Delta$  resulta ser:

$$[T] = [T^0] [T^\Delta]$$

**Importante:** El producto de las matrices debe hacerse siempre en el **mismo orden** en que los cuadripolos están interconectados entre sí.

#### 5.10.4 Interconexión Mixta (serie-paralelo o paralelo-serie)

Se denomina interconexión mixta a aquella en la cual los bornes de entrada de dos cuadripolos se interconectan de una manera, y los de salida de otra. Vemos así que tenemos dos posibilidades: interconexión mixta serie-paralelo (bornes de entrada interconectados en serie, y bornes de salida interconectados en paralelo) e interconexión mixta paralelo-serie (bornes de entrada interconectados en paralelo y bornes de salida interconectados en serie). Debido a que las variables independientes serán, en el primer caso, las corrientes de entrada y las tensiones de salida, y, en el segundo caso, las tensiones de entrada y las corrientes de salida, deberemos elegir para modelizar ambos cuadripolos a un juego de parámetros que nos permita dicha “mezcla” de variables. Esta condición es satisfecha por los parámetros híbridos  $\mathbf{H}$  (para el primer caso) y  $\mathbf{H}'$  (para el segundo). Dado que el procedimiento de obtención de la matriz equivalente es idéntico en ambas situaciones, desarrollaremos la interconexión serie-paralelo, mediante parámetros  $\mathbf{H}$ , mostrada en la Figura 14.

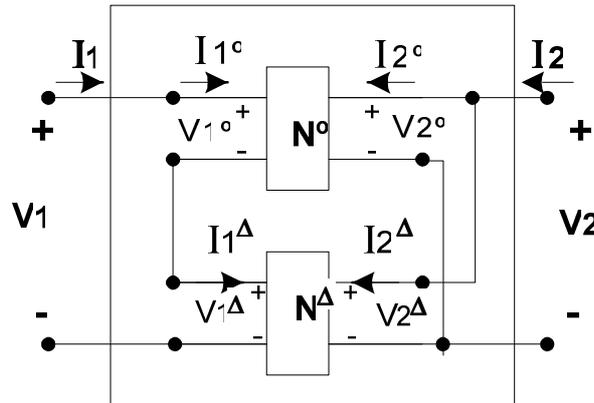


Figura 14: Interconexión mixta serie-paralelo de cuadripolos

Nuestro objetivo es hallar:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{H}] \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Para cada cuadripolo podemos escribir:

$$\begin{aligned} V_1^0 &= h_{11}^0 I_1^0 + h_{12}^0 V_2^0 & V_1^\Delta &= h_{11}^\Delta I_1^\Delta + h_{12}^\Delta V_2^\Delta \\ I_2^0 &= h_{21}^0 I_1^0 + h_{22}^0 V_2^0 & I_2^\Delta &= h_{21}^\Delta I_1^\Delta + h_{22}^\Delta V_2^\Delta \end{aligned} \quad (37)$$

Ecuaciones que, en forma matricial, tienen la forma:

$$\begin{bmatrix} V_1^0 \\ I_2^0 \end{bmatrix} = [\mathbf{H}^0] \begin{bmatrix} I_1^0 \\ V_2^0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} V_1^\Delta \\ I_2^\Delta \end{bmatrix} = [\mathbf{H}^\Delta] \begin{bmatrix} I_1^\Delta \\ V_2^\Delta \end{bmatrix} \quad (38)$$

Al estar ambos cuadripolos interconectados en serie a la entrada, por LKT se verifica que la tensión de entrada del cuadripolo equivalente es igual a la suma de las tensiones de entrada de cada uno de los cuadripolos, y dado que las salidas están interconectadas en paralelo, se verifica, por LKC, que la corriente de salida del cuadripolo equivalente es igual a la suma de las corrientes de salida de cada uno de los cuadripolos. Este análisis nos permite escribir que:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_1^0 + V_1^\Delta & I_1 &= I_1^0 = I_1^\Delta \\ I_2 &= I_2^0 + I_2^\Delta & V_2 &= V_2^0 = V_2^\Delta \end{aligned} \quad (39)$$

Por lo tanto, reemplazando sucesivamente (39) y (38) en (36) llegamos a que:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^0 \\ I_2^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1^\Delta \\ I_2^\Delta \end{bmatrix} = [\mathbf{H}^0] \begin{bmatrix} I_1^0 \\ V_2^0 \end{bmatrix} + [\mathbf{H}^\Delta] \begin{bmatrix} I_1^\Delta \\ V_2^\Delta \end{bmatrix} = \{[\mathbf{H}^0] + [\mathbf{H}^\Delta]\} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

O, lo que es lo mismo:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{H}] \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Donde:

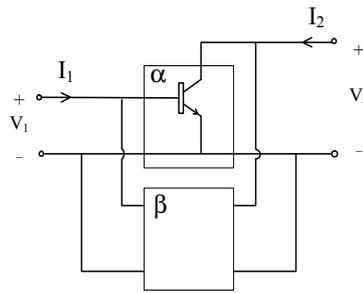
$$\boxed{[\mathbf{H}] = [\mathbf{H}^0] + [\mathbf{H}^\Delta]}$$

En el caso de conectar el puerto 2 de ambos cuadripolos en serie, y los puertos 1 en paralelo, el análisis se realiza en forma exactamente igual pero utilizando los parámetros  $\mathbf{H}'$ .

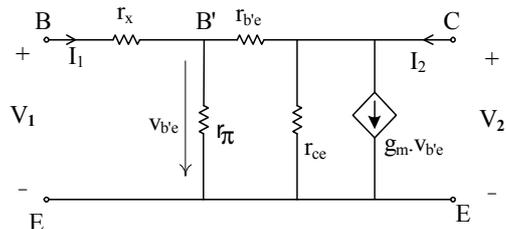
### **Ejemplos de aplicación:**

1) Dado el modelo de Giacoletto en baja frecuencia del transistor que se muestra en la figura siguiente se pide:

- Hallar los parámetros  $h$  del mismo.
- Expresar el cuadripolo resultante de la interconexión mediante una matriz adecuada.
- Calcular la resistencia vista a la entrada del cuadripolo equivalente cuando su salida está cortocircuitada.



$$[Y_{\beta}] = \begin{bmatrix} 1/(14k) & -1/ \\ & (22k) \\ -1/(42k) & 1/(8,4k) \end{bmatrix}$$

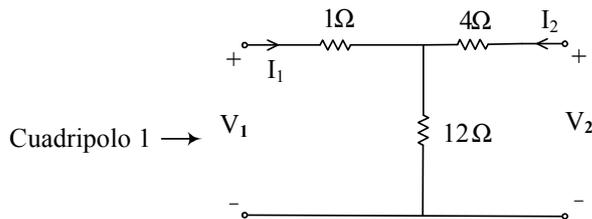
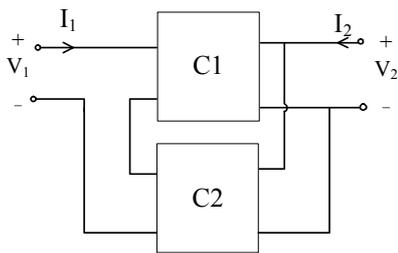


Modelo de Giacioletto del transistor para bajas frecuencias

**Datos:**  $r_x = 100 \Omega$   
 $r_{\pi} = 1K\Omega$   
 $r_{b'e} = r_{c'e} = 700 K\Omega$   
 $g_m = 50 m\Omega^{-1}$

Rta.: a)  $H_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1.100 & 1,42 \cdot 10^{-3} \\ 50 & 0,0514 \end{bmatrix}$  b)  $Y_{TOTAL} = \begin{bmatrix} 0,98 \cdot 10^{-3} & -46,74 \cdot 10^{-6} \\ 0,0454 & 0,103 \end{bmatrix}$   
 c)  $Z_{in} = 1,02 K\Omega$

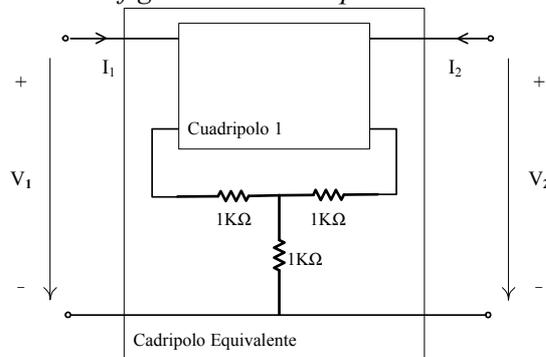
2) Hallar una matriz que represente al cuadripolo equivalente de la interconexión.



Cuadripolo 2  $\rightarrow Z_2 = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Rta.:  $H = \begin{bmatrix} 15,6 & 0,95 \\ -0,95 & 0,162 \end{bmatrix}$

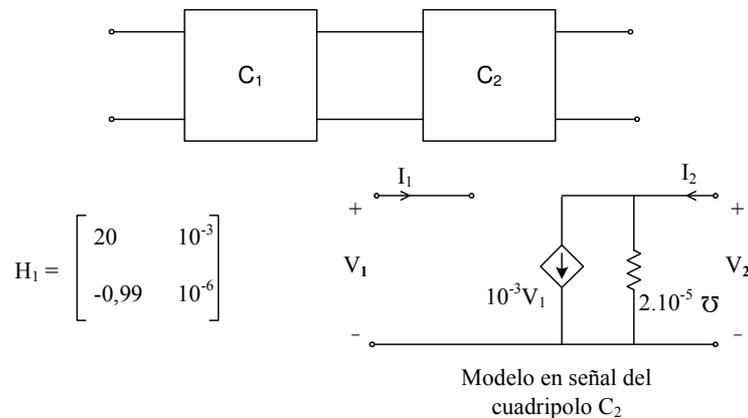
3) En la disposición de la figura obtener los parámetros Z del cuadripolo 1.



$T_{eq} = \begin{bmatrix} 2,3 & 5850 \\ 10^{-3} & 3 \end{bmatrix}$

Rta.:  $Z_1 = \begin{bmatrix} 300\Omega & 50\Omega \\ 0 & 1.000\Omega \end{bmatrix}$

4) Dado el siguiente esquema hallar los parámetros del cuadripolo equivalente.



$$H_1 = \begin{bmatrix} 20 & 10^{-3} \\ -0,99 & 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$Rta.: \quad T_1 = \begin{bmatrix} 10^{-3} & 20,2 \\ 10^{-6} & 1,01 \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} -0,02 & 10^{-3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} -2 \cdot 10^{-5} & -1 \\ -2 \cdot 10^{-8} & -1,01 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

### 5.11 Cuadripolos activos

Diremos que un cuadripolo es **activo** cuando en su interior se encuentran fuentes independientes, ya sea de tensión o de corriente. Ahora bien, mediante el teorema de superposición, podemos pensar que las variables dependientes, cualquiera sea el modelo de parámetros que elijamos, serán función no solo de las variables independientes, sino también del aporte que en ellas originen las fuentes independientes de tensión y/o corriente presentes en el circuito.

A modo de ejemplo, obtendremos el modelo equivalente en parámetros  $Z$  de un cuadripolo activo. Tal como sabemos, las tensiones  $V_1$  y  $V_2$  serán las **variables dependientes**, y las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  las **variables independientes**, estando las fuentes independientes incluidas en el cuadripolo. Dado que la red es lineal, el teorema de superposición nos permite asegurar que las tensiones  $V_1$  y  $V_2$  pueden obtenerse considerando la contribución de las variables independientes más el aporte de las fuentes independientes, lo cual escribimos de la siguiente manera:

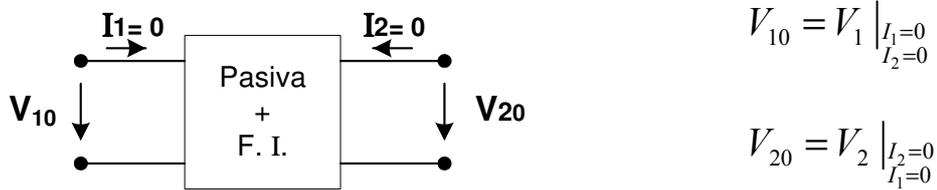
$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + V_{10} \\ V_2 &= Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + V_{20} \end{aligned} \quad (40)$$

O, en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{10} \\ V_{20} \end{bmatrix} \quad (41)$$

donde  $Z_{ij}$  son los parámetros  $Z$  del cuadripolo pasivado (es decir, con las fuentes independientes del interior inactivas), mientras que  $V_{10}$  y  $V_{20}$  representan la contribución de las fuentes independientes que hay dentro del cuadripolo a las tensiones  $V_1$  y  $V_2$ , contribución que se obtiene pasivando ahora las variables independientes. El subíndice "0" implica condición de circuito abierto, y por ende, de corrientes independientes nulas.

Las componentes  $V_{10}$  y  $V_{20}$  debido a la acción de las fuentes independientes dentro del cuadripolo pueden hallarse si  $I_1 = I_2 = 0$ . Esta condición de cuadripolo en circuito abierto se logra abriendo los terminales 1-1' y 2-2', como se muestra en la figura siguiente:



Los valores de  $V_{10}$  y  $V_{20}$  obtenidos se denominan *tensiones de circuito abierto*.

Luego se pasivan las fuentes independientes internas, y se calculan los parámetros en la forma habitual:

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} \qquad Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} \qquad Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} \qquad Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

En estas condiciones, el modelo correspondiente a las ecuaciones (41) será el mostrado en la F

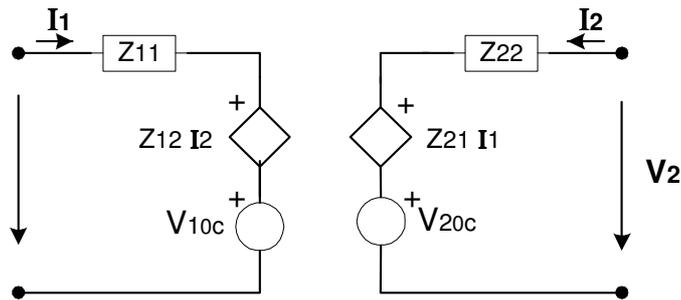
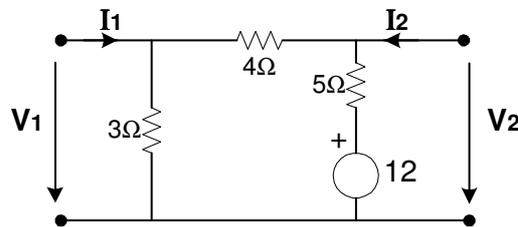


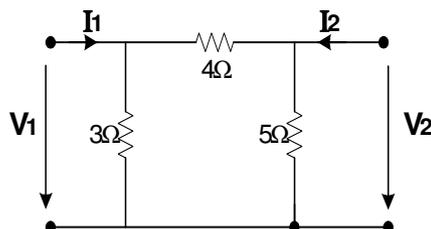
Figura 15: Modelo de cuadripolo activo con parámetros  $Z$

**Ejemplo de aplicación:**

Hallar el equivalente en parámetros  $Z$  del siguiente cuadripolo



Primero pasivamos las fuentes, y calculamos los parámetros ( $Z$ ) en la forma habitual:



$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = 3 // 9 = \frac{9}{4} \Omega$$

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{I_2 \frac{5}{12} \times 3}{I_2} = \frac{5}{4} \Omega$$

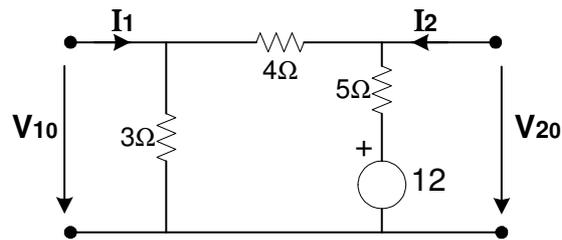
$$Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} = \frac{I_1 \frac{3}{12} \times 5}{I_2} = \frac{5}{4} \Omega$$

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} = 5 // 7 = \frac{35}{12} \Omega$$

luego, calculamos el aporte de la fuente interna a las tensiones de entrada y salida en vacío:

$$V_{10} = 12 \times \frac{3}{12} = 3V$$

$$V_{20} = 12 \times \frac{7}{12} = 7V$$



Por lo tanto, el modelo completo del cuadripolo activo resulta:

$$V_1 = \frac{9}{4} I_1 + \frac{5}{4} I_2 + 3$$

$$V_2 = \frac{5}{4} I_1 + \frac{35}{12} I_2 + 7$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/4 & 5/4 \\ 5/4 & 35/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

**PROBLEMAS PROPUESTOS:**

1) Una red de tres terminales tiene los siguientes parámetros admitancia:

$$Y_{11} = 2$$

$$Y_{22} = 1$$

$$Y_{12} = 1$$

$$Y_{21} = 1$$

Hallar los parámetros impedancia.

Rta.: 
$$[Z] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2) Hallar los parámetros de la matriz T para la red de la figura a) utilizando el modelo del transistor de la figura b). Pensar la figura a) como interconexión de dos cuadripolos. Para ello analizar cuáles son las variables en común que comparten los dos cuadripolos.

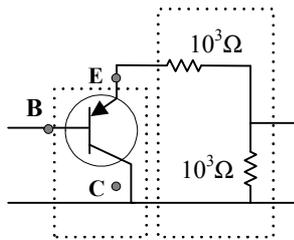


fig a)

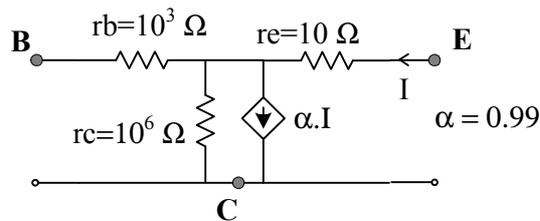


fig b)

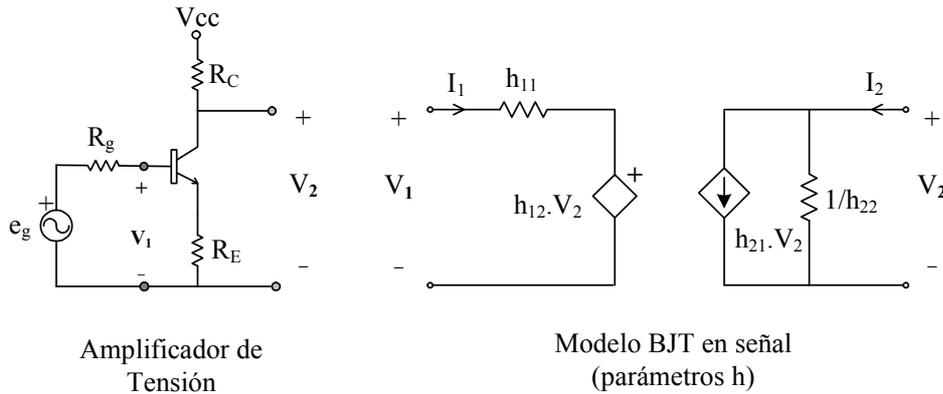
Modelo del Transistor en configuración colector común

Rta.:  $T_1 = \begin{bmatrix} 1,001 & 20,01\Omega \\ 10^{-6}\Omega^{-1} & 0,01001 \end{bmatrix}$   $T_2 = \begin{bmatrix} 2 & 10^3\Omega \\ 10^{-3}\Omega^{-1} & 1 \end{bmatrix}$   $T = \begin{bmatrix} 2,022 & 1021,01\Omega \\ 30 \cdot 10^{-6}\Omega^{-1} & 0,02 \end{bmatrix}$

3) El siguiente circuito muestra un amplificador de tensión con realimentación en emisor (configuración emisor común). Notar que se trata de un circuito con superposición de dos fuentes de distinto tipo:  $V_{cc}$  (continua) y  $e_s$  (señal a amplificar).

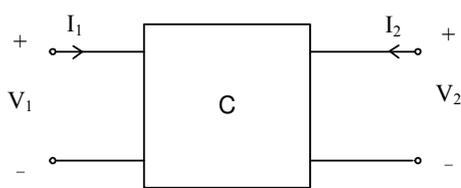
- a) Hallar  $R_E$  de manera de obtener ganancia en señal del amplificador  $A_v = V_2/V_1 = -100$  (Nota: pasivar  $V_{cc}$  y no considerar  $R_c$  para el cálculo).
- b) Calcular la impedancia de entrada al conectar  $R_c$  como carga.

$R_c = 22\text{ K}\Omega$      $h_{21} = 100$      $h_{11} = 2,7\text{ K}\Omega$      $h_{22} = (40\text{K}\Omega)^{-1}$      $h_{12} = 2,5 \cdot 10^{-4}$



Rta.: a)  $R_E = 37,9\text{ K}\Omega$     b)  $Z_{in} = 1,54\text{ M}\Omega$

4) Para identificar al cuadripolo C se efectuaron dos ensayos:



Puerto 2 abierto:  
 $V_1 = 8\text{ mV}$      $I_1 = 4\text{ }\mu\text{A}$      $V_2 = -8\text{ V}$

Puerto 2 en cortocircuito:  
 $V_1 = 5\text{ V}$      $I_1 = 5\text{ mA}$      $I_2 = 250\text{ mA}$

- a) Proponer un modelo del cuadripolo C.
- b) Calcular el cuadripolo equivalente en cada una de las disposiciones que siguen.

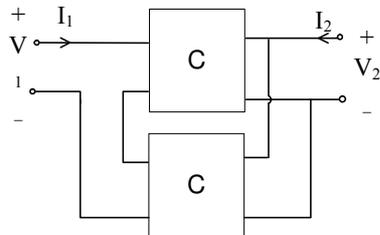


figura 1

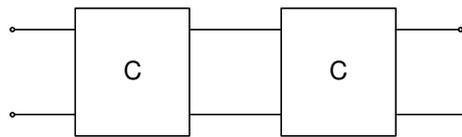
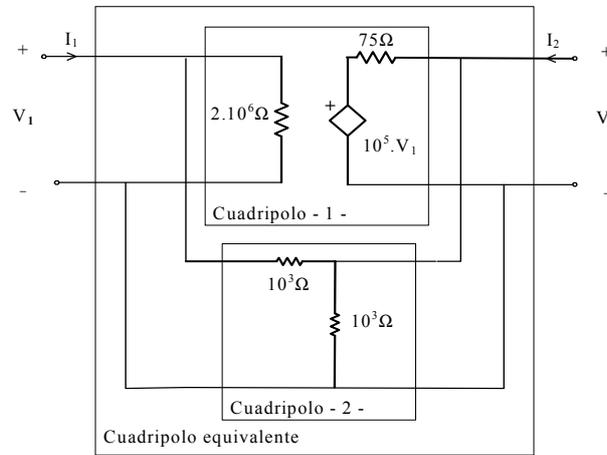


figura 2

Rta.: a)  $T_C = \begin{bmatrix} -0,001 & -20\Omega \\ -0,5 \cdot 10^{-6}\Omega^{-1} & -0,02 \end{bmatrix}$

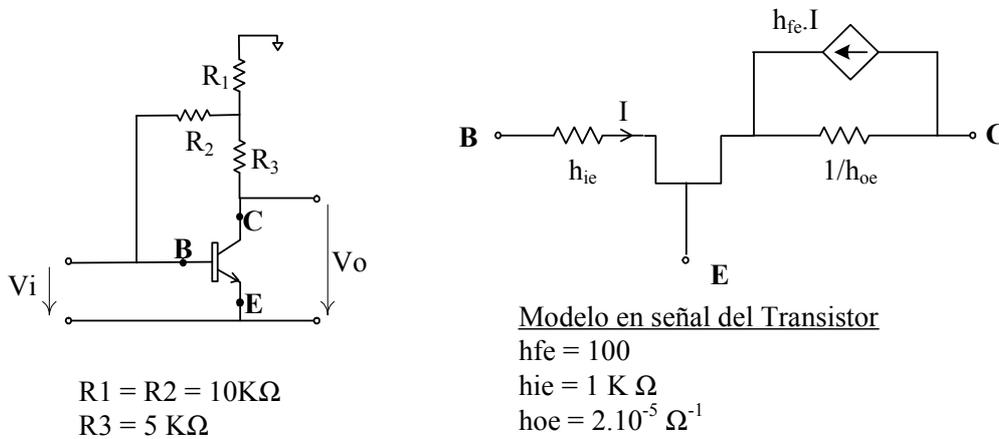
b)  $H_{eq} = \begin{bmatrix} 2.000 & -1.10^{-3} \\ -100 & -50.10^{-6} \end{bmatrix}$  (en fig. 1)      $T_{eq} = \begin{bmatrix} 11.10^{-6} & 0,42\Omega \\ 10,5.10^{-9}\Omega^{-1} & 4,1.10^{-4} \end{bmatrix}$  (en fig. 2)

5) Hallar los parámetros del cuadripolo equivalente correspondiente a la conexión mostrada.



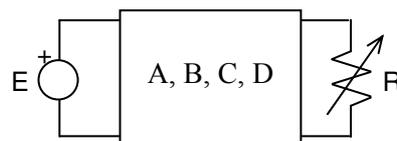
Rta.:  $Y_{eq} = \begin{bmatrix} 1,005.10^{-3} & -1.10^{-3} \\ -1333,3 & 0,015 \end{bmatrix}$

6) Hallar los parámetros del cuadripolo equivalente del modelo en señal del siguiente circuito:



Rta.:  $Y_{eq} = \begin{bmatrix} 1,1.10^{-3} \Omega^{-1} & -0,05.10^{-3} \Omega^{-1} \\ 99,95.10^{-3} \Omega^{-1} & 0,095.10^{-3} \Omega^{-1} \end{bmatrix}$

7) Dado el cuadripolo de constantes transferencia A, B, C y D que se muestra a continuación:



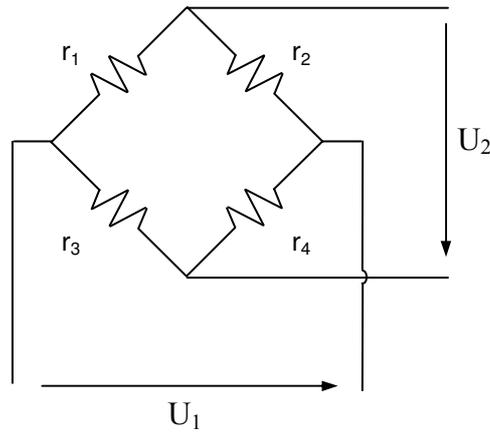
a) Hallar el valor de la R (de carga) como una función de las constantes de transferencia, tal que la potencia disipada en la carga sea máxima.

24

b) Aplicar numéricamente para  $a = 2$ ,  $b = 30 \Omega$ ,  $c = 0,1 \Omega^{-1}$ ,  $E = 10 \text{ V}$  y calcular la potencia máxima y el rendimiento correspondiente  $\eta = P_{R_{\max}} / P_1$ .

8) En el siguiente cuadripolo, se conocen los valores de todas las resistencias en las distintas ramas. Se pide:

- Hallar los parámetros transferencia.
- Las resistencias de entrada y salida en cortocircuito y circuito abierto
- Si se alimenta el cuadripolo desde la salida con una fuente  $E_2 = 100 \text{ V}$  y  $r_{\text{fuente}} = 2 \Omega$ , ¿Cuál es la potencia disipada en una  $R_c = 40 \Omega$  conectada a la entrada?



$$r_1 = 2 \Omega$$

$$r_2 = 6 \Omega$$

$$r_3 = 4 \Omega$$

$$r_4 = 4 \Omega$$

TABLA DE CONVERSIÓN DE PARÁMETROS DE CUADRIPOLOS

	Z	Y	H	H'	T	T'
Z	$\begin{matrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{y_{22}}{\Delta_y} & -\frac{y_{12}}{\Delta_y} \\ -\frac{y_{21}}{\Delta_y} & \frac{y_{11}}{\Delta_y} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_h}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ -\frac{h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -h'_{12} \\ h'_{11} & h'_{11} \\ h'_{21} & \Delta_{h'} \\ h'_{11} & h'_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{t_{11}}{t_{21}} & \frac{\Delta_t}{t_{21}} \\ 1 & \frac{t_{22}}{t_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{t'_{22}}{t'_{21}} & \frac{1}{t'_{21}} \\ \frac{\Delta_{t'}}{t'_{21}} & \frac{t'_{11}}{t'_{21}} \end{matrix}$
Y	$\begin{matrix} \frac{z_{22}}{\Delta_z} & -\frac{z_{12}}{\Delta_z} \\ -\frac{z_{21}}{\Delta_z} & \frac{z_{11}}{\Delta_z} \end{matrix}$	$\begin{matrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{11}} & -\frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta_h}{h_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_{h'}}{h'_{22}} & \frac{h'_{12}}{h'_{22}} \\ -h'_{21} & 1 \\ h'_{22} & h'_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{t_{22}}{t_{12}} & -\frac{\Delta_t}{t_{12}} \\ -1 & \frac{t_{11}}{t_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{t'_{11}}{t'_{12}} & -\frac{1}{t'_{12}} \\ -\frac{\Delta_{t'}}{t'_{12}} & \frac{t'_{22}}{t'_{12}} \end{matrix}$
H	$\begin{matrix} \frac{\Delta_z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ -\frac{z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -y_{12} \\ y_{11} & y_{11} \\ y_{21} & \Delta_y \\ y_{11} & y_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} h'_{22} & h'_{12} \\ \Delta_{h'} & \Delta_{h'} \\ h'_{21} & h'_{11} \\ \Delta_{h'} & \Delta_{h'} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{t_{12}}{t_{22}} & \frac{\Delta_t}{t_{22}} \\ -1 & \frac{t_{21}}{t_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{t'_{12}}{t'_{11}} & \frac{1}{t'_{11}} \\ -\frac{\Delta_{t'}}{t'_{11}} & \frac{t'_{21}}{t'_{11}} \end{matrix}$
H'	$\begin{matrix} \frac{1}{z_{11}} & -\frac{z_{12}}{z_{11}} \\ \frac{z_{21}}{z_{11}} & \frac{\Delta_z}{z_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\Delta_y}{y_{22}} & \frac{y_{12}}{y_{22}} \\ -\frac{y_{21}}{y_{22}} & \frac{1}{y_{22}} \\ y_{22} & y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{h_{22}}{\Delta_h} & -\frac{h_{12}}{\Delta_h} \\ -\frac{h_{21}}{\Delta_h} & \frac{h_{11}}{\Delta_h} \\ \Delta_h & \Delta_h \end{matrix}$	$\begin{matrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{t_{21}}{t_{11}} & -\frac{\Delta_t}{t_{11}} \\ 1 & \frac{t_{12}}{t_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{t'_{21}}{t'_{22}} & -\frac{1}{t'_{22}} \\ -\frac{\Delta_{t'}}{t'_{22}} & \frac{t'_{12}}{t'_{22}} \end{matrix}$
T	$\begin{matrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} & \frac{\Delta_z}{z_{21}} \\ 1 & \frac{z_{22}}{z_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -y_{22} & -1 \\ y_{21} & y_{21} \\ -\Delta_y & -y_{11} \\ y_{21} & y_{21} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta_h}{h_{21}} & -\frac{h_{11}}{h_{21}} \\ \frac{h_{21}}{h_{21}} & \frac{h_{21}}{h_{21}} \\ -\frac{h_{22}}{h_{21}} & -\frac{1}{h_{21}} \\ h_{21} & h_{21} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -h'_{22} \\ h'_{21} & h'_{21} \\ h'_{11} & \Delta_{h'} \\ h'_{21} & h'_{21} \end{matrix}$	$\begin{matrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{t'_{22}}{\Delta_{t'}} & \frac{t'_{12}}{\Delta_{t'}} \\ \frac{t'_{21}}{\Delta_{t'}} & \frac{t'_{11}}{\Delta_{t'}} \end{matrix}$
T'	$\begin{matrix} \frac{z_{22}}{z_{12}} & \frac{\Delta_z}{z_{12}} \\ 1 & \frac{z_{11}}{z_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -y_{11} & -1 \\ y_{12} & y_{12} \\ -\Delta_y & -y_{22} \\ y_{12} & y_{12} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{h_{12}} & \frac{h_{11}}{h_{12}} \\ \frac{h_{22}}{h_{12}} & \frac{\Delta_h}{h_{12}} \\ \frac{h_{12}}{h_{12}} & \frac{h_{12}}{h_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{\Delta_{h'}}{h'_{12}} & -\frac{h'_{22}}{h'_{12}} \\ h'_{12} & h'_{12} \\ -h'_{11} & -1 \\ h'_{12} & h'_{12} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{t_{22}}{\Delta_t} & \frac{t_{12}}{\Delta_t} \\ \frac{t_{21}}{\Delta_t} & \frac{t_{11}}{\Delta_t} \end{matrix}$	$\begin{matrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{21} & t'_{22} \end{matrix}$

NOTA:

$$\Delta_Z = \det(Z) \quad \Delta_Y = \det(Y) \quad \Delta_h = \det(H)$$

$$\Delta_{h'} = \det(H') \quad \Delta_t = \det(T) \quad \Delta_{t'} = \det(T')$$